



Mathematical Modelling and Geometry

Статья Цепь Маркова из Википедии под шаблон

Цепь Маркова

Магос Иоаннис НПИ-бд-01-25 1032240004^{1,a}

¹ РУДН, Факультет физико-математических и естественных наук, направление прикладной информатики

e-mail: 1032240004@rudn.ru

Abstract. Цепь Маркова — последовательность случайных событий с конечным или счётным числом исходов, где вероятность наступления каждого события зависит только от состояния, достигнутого в предыдущем событии. Характеризуется тем свойством, что, говоря нестрого, при текущем настоящем состоянии системы, её будущее состояние не зависит от прошлого. В случае цепи Маркова N-го порядка вероятность наступления каждого события зависит от состояния, достигнутого в N предыдущих событиях.

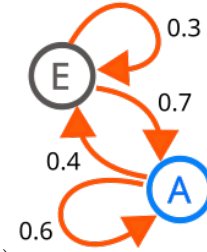
Keywords: цепь Маркова, случайное событие, матрица перехода, вероятность.

Цепь Маркова с дискретным временем

Определение

Последовательность дискретных случайных величин $\{X_n\}_{n \geq 0}$ называется простой цепью Маркова (цепью Маркова первого порядка) (с дискретным временем), если

$$P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n)$$



Таким образом, в простейшем случае условное распределение последующего состояния цепи Маркова зависит только от текущего состояния и не зависит от всех предыдущих состояний (в отличие от цепей Маркова высших порядков).

Последовательность дискретных случайных величин $\{X_n\}_{n \geq 0}$ называется цепью Маркова N -го порядка (с дискретным временем), если

$$P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n, \dots, X_{n-N+1} = i_{n-N+1}).$$

Таким образом, условное распределение последующего состояния цепи Маркова N -го порядка зависит от текущего состояния и от $N - 1$ предыдущих состояний.

Область значений случайных величин $\{X_n\}$ называется **пространством состояний** цепи, а номер n — номером шага.

Переходная матрица и однородные цепи

Матрица $P(n)$, где

$$P_{ij}^{(n)} \equiv \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i),$$

называется матрицей переходных вероятностей на n -м шаге, а вектор

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots)^\top,$$

где

$$p_i \equiv \mathbb{P}(X_0 = i),$$

— начальным распределением цепи Маркова.

Очевидно, матрица переходных вероятностей является стохастической справа, то есть

$$\sum_j P_{ij}^{(n)} = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Цепь Маркова называется однородной, если матрица переходных вероятностей не зависит от номера шага, то есть

$$P_{ij}^{(n)} = P_{ij}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

В противном случае цепь Маркова называется неоднородной. В дальнейшем будем предполагать, что имеем дело с однородными цепями Маркова.

Конечномерные распределения и матрица перехода за n шагов

Из свойств условной вероятности и определения однородной цепи Маркова получаем:

$$\mathbb{P}(X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0) = P_{i_{n-1}, i_n} \cdots P_{i_0, i_1} P_{i_0},$$

откуда вытекает специальный случай уравнения Колмогорова — Чепмена:

$$\mathbb{P}(X_n = i_n \mid X_0 = i_0) = (P^n)_{i_0, i_n},$$

то есть матрица переходных вероятностей за n шагов однородной цепи Маркова есть n -я степень матрицы переходных вероятностей за 1 шаг. Наконец,

$$\mathbb{P}(X_n = i_n) = ((P^T)^n \mathbf{p})_{i_n}.$$

Типы состояний

- Возвратное состояние.
- Возвратная цепь Маркова.
- Достижимое состояние.
- Неразложимая цепь Маркова.
- Периодическое состояние.
- Периодическая цепь Маркова.
- Поглощающее состояние. Состояние i называется поглощающим, если $P_{i,i} = 1$.
- Эргодическое состояние.

Примеры

- Ветвящийся процесс;
- Случайное блуждание;

Цепь Маркова с непрерывным временем

Определение

Семейство дискретных случайных величин $\{X_t\}_{t \geq 0}$ называется цепью Маркова (с непрерывным временем), если

$$\mathbb{P}(X_{t+h} = x_{t+h} \mid X_s = x_s, 0 < s \leq t) = \mathbb{P}(X_{t+h} = x_{t+h} \mid X_t = x_t).$$

Цепь Маркова с непрерывным временем называется однородной, если

$$\mathbb{P}(X_{t+h} = x_{t+h} \mid X_t = x_t) = \mathbb{P}(X_h = x_h \mid X_0 = x_0).$$

Матрица переходных функций и уравнение Колмогорова — Чепмена

Аналогично случаю дискретного времени, конечномерные распределения однородной цепи Маркова с непрерывным временем полностью определены начальным распределением

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots)^\top, \quad p_i = \mathbb{P}(X_0 = i), \quad i = 1, 2, \dots$$

и матрицей переходных функций (переходных вероятностей)

$$\mathbf{P}(h) = (P_{ij}(h)) = \mathbb{P}(X_h = j \mid X_0 = i).$$

Матрица переходных вероятностей удовлетворяет уравнению Колмогорова — Чепмена:

$$\mathbf{P}(t + s) = \mathbf{P}(t)\mathbf{P}(s),$$

или

$$P_{ij}(t + s) = \sum_k P_{ik}(t)P_{kj}(s).$$

Матрица интенсивностей и дифференциальные уравнения Колмогорова

По определению матрица интенсивностей

$$\mathbf{Q} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{P}(h) - \mathbf{I}}{h},$$

или, что эквивалентно,

$$\mathbf{Q} = (q_{ij}) = \left(\frac{dP_{ij}(h)}{dh} \right)_{h=0}.$$

Из уравнения Колмогорова — Чепмена следуют два уравнения:

Прямое уравнение Колмогорова

$$\frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q}.$$

Обратное уравнение Колмогорова

$$\frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} = \mathbf{Q}\mathbf{P}(t).$$

Для обоих уравнений начальным условием выбирается $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$. Соответствующее решение $\mathbf{P}(t) = \exp(\mathbf{Q}t)$.

Свойства матриц $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$

Для любого $t > 0$ матрица $\mathbf{P}(t)$ обладает следующими свойствами:

1. Матричные элементы $\mathbf{P}(t)$ неотрицательны: $P_{ij}(t) \geq 0$ (неотрицательность вероятностей).
2. Сумма элементов в каждой строке $\mathbf{P}(t)$ равна 1: $\sum_j P_{ij}(t) = 1$ (полная вероятность), то есть матрица $\mathbf{P}(t)$ является стохастической справа (по строкам).

3. Все собственные числа λ матрицы $\mathbf{P}(t)$ не превосходят 1 по модулю: $|\lambda| \leq 1$. Если $|\lambda| = 1$, то $\lambda = 1$.
4. Собственному числу $\lambda = 1$ матрицы $\mathbf{P}(t)$ соответствует как минимум один неотрицательный левый собственный вектор-строка (равновесие): $(p_1^*, p_2^*, \dots)$, где $p_i^* \geq 0$, $\sum_i p_i^* = 1$, и $\sum_i p_i^* P_{ij}(t) = p_j^*$.
5. Для собственного числа $\lambda = 1$ матрицы $\mathbf{P}(t)$ все корневые векторы являются собственными, то есть жордановы клетки тривиальны.

Матрица $\mathbf{Q}$ обладает следующими свойствами:

1. Внедиагональные элементы $\mathbf{Q}$ неотрицательны: $q_{ij} \geq 0$, $i \neq j$.
2. Диагональные элементы $\mathbf{Q}$ неположительны: $q_{ii} \leq 0$.
3. Сумма элементов в каждой строке $\mathbf{Q}$ равна нулю: $\sum_j q_{ij} = 0$.
4. Все собственные числа μ матрицы $\mathbf{Q}$ имеют неположительную действительную часть: $\operatorname{Re}(\mu) \leq 0$. Если $\operatorname{Re}(\mu) = 0$, то $\mu = 0$.
5. Собственному числу $\mu = 0$ матрицы $\mathbf{Q}$ соответствует как минимум один неотрицательный левый собственный вектор-строка (равновесие): $(p_1^*, p_2^*, \dots)$, где $p_i^* \geq 0$, $\sum_i p_i^* = 1$, и $\sum_i p_i^* q_{ij} = 0$.
6. Для собственного числа $\mu = 0$ матрицы $\mathbf{Q}$ все корневые векторы являются собственными (жордановы клетки тривиальны).

Граф переходов, связность и эргодические цепи Маркова

Для цепи Маркова с непрерывным временем строится ориентированный граф переходов (кратко — граф переходов) по следующим правилам:

- Множество вершин графа совпадает со множеством состояний цепи.
- Вершины i, j ($i \neq j$) соединяются ориентированным ребром $i \rightarrow j$, если $q_{ij} > 0$ (то есть интенсивность потока из i -го состояния в j -е положительна).

Топологические свойства графа переходов связаны со спектральными свойствами матрицы $\mathbf{Q}$. В частности, для конечных цепей Маркова верны следующие теоремы:

- Следующие три свойства А, Б, В конечной цепи Маркова эквивалентны (обладающие ими цепи иногда называют слабо эргодическими):
 - А. Для любых двух различных вершин графа переходов i, j ($i \neq j$) найдется такая вершина k графа («общий сток»), что существуют ориентированные пути от вершины i к вершине k и от вершины j к вершине k .
 - Б. Нулевое собственное число матрицы $\mathbf{Q}$ невырождено.
 - В. При $t \rightarrow \infty$ матрица $\mathbf{P}(t)$ стремится к матрице, у которой все строки совпадают (и совпадают, очевидно, с равновесным распределением).

- Следующие пять свойств А, Б, В, Г, Д конечной цепи Маркова эквивалентны (обладающие ими цепи называют эргодическими):

А. Граф переходов цепи ориентированно связан.

Б. Нулевое собственное число матрицы $\mathbf{Q}$ невырождено и ему соответствует строго положительный левый собственный вектор (равновесное распределение).

В. Для некоторого $t > 0$ матрица $\mathbf{P}(t)$ строго положительна (то есть $P_{ij}(t) > 0$ для всех i, j).

Г. Для всех $t > 0$ матрица $\mathbf{P}(t)$ строго положительна.

Д. При $t \rightarrow \infty$ матрица $\mathbf{P}(t)$ стремится к строго положительной матрице, у которой все строки совпадают (и совпадают, очевидно, с равновесным распределением).

Примеры

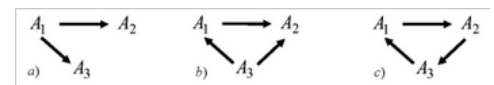


Рис. Примеры графов переходов для цепей Маркова: а) цепь не является слабо эргодической (не существует общего стока для состояний A_2, A_3); б) слабо эргодическая цепь (граф переходов не является ориентированно связным) в) эргодическая цепь (граф переходов ориентированно связан).

Рассмотрим цепи Маркова с тремя состояниями и с непрерывным временем, соответствующие графам переходов, представленным на рисунке. В случае (а) отличны от нуля только следующие недиагональные элементы матрицы интенсивностей — q_{12}, q_{13} . В случае (б) отличны от нуля только q_{12}, q_{31}, q_{32} , а в случае (с) — q_{12}, q_{23}, q_{31} . Остальные элементы определяются свойствами матрицы $\mathbf{Q}$ (сумма элементов в каждой строке равна нулю). В результате для графов (а), (б), (с) матрицы интенсивностей имеют вид:

$$\mathbf{Q}_a = \begin{pmatrix} -(q_{12} + q_{13}) & q_{12} & q_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_b = \begin{pmatrix} -q_{12} & q_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ q_{31} & q_{32} & -(q_{31} + q_{32}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_c = \begin{pmatrix} -q_{12} & q_{12} & 0 \\ 0 & -q_{23} & q_{23} \\ q_{31} & 0 & -q_{31} \end{pmatrix}.$$

Основное кинетическое уравнение

Основное кинетическое уравнение

Основное кинетическое уравнение описывает эволюцию распределения вероятностей в цепи Маркова с непрерывным временем. «Основное уравнение» здесь — не эпитет, а перевод термина англ. Master equation.

Для вектора-строки распределения вероятностей π основное кинетическое уравнение имеет вид:

$$\frac{d\pi}{dt} = \pi \mathbf{Q},$$

и совпадает, по существу, с прямым уравнением Колмогорова.

В физической литературе чаще используют векторы-столбцы вероятностей и записывают основное кинетическое уравнение в виде, который явно использует закон сохранения полной вероятности:

$$\frac{dp_i}{dt} = \sum_{j, j \neq i} (T_{ij}p_j - T_{ji}p_i),$$

где

$$T_{ij} = q_{ji}.$$

Если для основного кинетического уравнения существует положительное равновесие $p_i^* > 0$, то его можно записать в форме:

$$\frac{dp_i}{dt} = \sum_{j, j \neq i} T_{ij}p_j^* \left(\frac{p_j}{p_j^*} - \frac{p_i}{p_i^*} \right).$$

Функции Ляпунова для основного кинетического уравнения

Для основного кинетического уравнения существует богатое семейство выпуклых функций Ляпунова — монотонно меняющихся со временем функций распределения вероятностей.

Пусть $h(x)$ ($x > 0$) — выпуклая функция одного переменного. Для любого положительного распределения вероятностей ($p_i > 0$) определим функцию Моримото $H_h(p)$:

$$H_h(p) = \sum_i p_i^* h\left(\frac{p_i}{p_i^*}\right).$$

Производная $H_h(p)$ по времени, если $p(t)$ удовлетворяет основному кинетическому уравнению, есть:

$$\frac{dH_h(p(t))}{dt} = \sum_{i,j, i \neq j} T_{ij}p_j^* \left[h\left(\frac{p_i}{p_i^*}\right) - h\left(\frac{p_j}{p_j^*}\right) + h'\left(\frac{p_i}{p_i^*}\right) \left(\frac{p_j}{p_j^*} - \frac{p_i}{p_i^*}\right) \right] \leq 0.$$

Последнее неравенство справедливо из-за выпуклости $h(x)$.

Примеры функций Моримото $H_h(p)$

- $h(x) = |x - 1|$, тогда

$$H_h(p) = \sum_i |p_i - p_i^*|.$$

Эта функция — расстояние от текущего распределения вероятностей до равновесного в l_1 -норме. Сдвиг по времени является сжатием пространства вероятностных распределений в этой норме. (О свойствах сжатий см. Теорему Банаха о неподвижной точке.)

- $h(x) = x \ln x$, тогда

$$H_h(p) = \sum_i p_i \ln \left(\frac{p_i}{p_i^*} \right).$$

Эта функция — (минус) энтропия Кульбака — Лейблера. В физике она соответствует свободной энергии, делённой на kT (где k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура). Если $p_i^* = \exp(\mu_0 - U_i/kT)$ (распределение Больцмана), то

$$H_h(p) = \frac{\langle U \rangle - TS}{kT}.$$

- $h(x) = -\ln x$, тогда

$$H_h(p) = -\sum_i p_i^* \ln \left(\frac{p_i}{p_i^*} \right).$$

Эта функция — аналог свободной энергии для энтропии Бурга, используемой в обработке сигналов:

$$S_{\text{Burg}} = \sum_i \ln p_i.$$

- $h(x) = \frac{(x-1)^2}{2}$, тогда

$$H_h(p) = \sum_i \frac{(p_i - p_i^*)^2}{2p_i^*}.$$

Это квадратичное приближение (минус) энтропии Кульбака вблизи равновесия. С точностью до постоянного слагаемого эта функция совпадает с (минус) энтропией Фишера.

- $h(x) = \frac{x^2}{2}$, тогда

$$H_h(p) = \sum_i \frac{p_i^2}{2p_i^*}.$$

Это (минус) энтропия Фишера.

- $h(x) = \frac{x^q - 1}{q - 1}$, $q > 0$, $q \neq 1$, тогда

$$H_h(p) = \frac{1}{q - 1} \left[\sum_i p_i^* \left(\frac{p_i}{p_i^*} \right)^q - 1 \right].$$

Это аналог свободной энергии для энтропии Тсаллиса. Энтропия Тсаллиса

$$S_q = \frac{1}{q - 1} \left(1 - \sum_i p_i^q \right)$$

служит основой статистической физики неэкстенсивных систем. При $q \rightarrow 1$ она переходит в энтропию Больцмана — Гиббса — Шеннона, а соответствующая функция Моримото — в (минус) энтропию Кульбака.

Практическое применение

Одной из первых научных дисциплин, в которой цепи Маркова нашли практическое применение, стала лингвистика (в частности текстология). Сам Марков для иллюстрации своих результатов исследовал зависимость в чередовании гласных и согласных в первых главах «Евгения Онегина» и «Детских годов Багрова-внука».

Цепи Маркова используют для генерации текста, моделирования процессов смешивания сыпучих материалов, управленческом мониторинге, языковых моделях.

Литература

- Кельберт М. Я., Сухов Ю. М. Вероятность и статистика в примерах и задачах. Т. II: Марковские цепи как отправная точка теории случайных процессов и их приложения. — М.: МЦНМО, 2010. — 295 с. — ISBN 978-5-94057-252-7.
- Марков А. А. Распространение закона больших чисел на величины, зависящие друг от друга. — Известия физико-математического общества при Казанском университете. — 2-я серия. — Том 15 (1906). — С. 135—156.
- Маркова цепь / А. В. Прохоров // Большая российская энциклопедия. — М.: Большая российская энциклопедия, 2004—2017.
- Kemeny J. G., Snell J. L. Finite Markov chains. — Princeton: Van Nostrand, 1960.
- Kemeny J. G., Snell J. L. Конечные цепи Маркова. — М.: Наука, 1970. — 272 с.
- Чжун Кай-лай. Однородные цепи Маркова. Пер. с англ. — М.: Мир, 1964. — 425 с.
- Нуммелин Э. Общие неприводимые цепи Маркова и неотрицательные операторы. — М.: Мир, 1989. — 207 с.
- Morimoto T. Markov processes and the H-theorem. — J. Phys. Soc. Jap. 12 (1963), 328—331.
- Яглом А. М., Яглом И. М. Вероятность и информация. — М.: Наука, 1973. — 512 с.
- Kullback S. Information theory and statistics. — Wiley, New York, 1959.
- Burg J. P. The Relationship Between Maximum Entropy Spectra and Maximum Likelihood Spectra. — Geophysics 37(2) (1972), 375—376.
- Tsallis C. Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics. — J. Stat. Phys. 52 (1988), 479—487.
- Рудой Ю. Г. Обобщенная информационная энтропия и неканоническое распределение в равновесной статистической механике. — Теоретическая и математическая физика, 135:1 (2003), 3—54.
- Gorban A. N., Gorban P. A., Judge G. Entropy: The Markov Ordering Approach. — Entropy 12(5) (2010), 1145—1193.